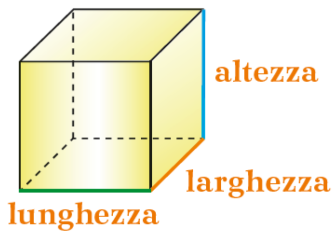
Geometria solida: elementi fondamentali

Oggetti tridimensionali

Gli **oggetti tridimensionali** sono figure solide con tre dimensioni: **lunghezza**, **larghezza** e **altezza** (o spessore).

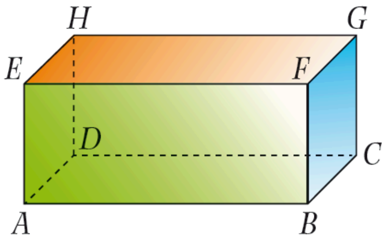


Se si vuole disegnare su un foglio un oggetto tridimensionale, occorre far uso della **prospettiva obliqua**.


di fronte


di lato


dall'alto



in prospettiva obliqua

Nel passaggio dalla realtà alla prospettiva, alcune caratteristiche si conservano, altre no:

- le facce frontali, *ABFE* e *DCGH*, sono disegnate nella loro vera forma;
- gli spigoli verticali rimangono verticali e paralleli conservando le loro misure;
- le ampiezze degli angoli non sempre corrispondono a quelle reali, solo gli angoli delle facce *ABFE* e *DCGH* rimangono retti;
- gli spigoli orizzontali che sono rappresentati in direzione obliqua hanno dimensioni ridotte;
- i segmenti nascosti sono disegnati tratteggiati come se il solido fosse trasparente.

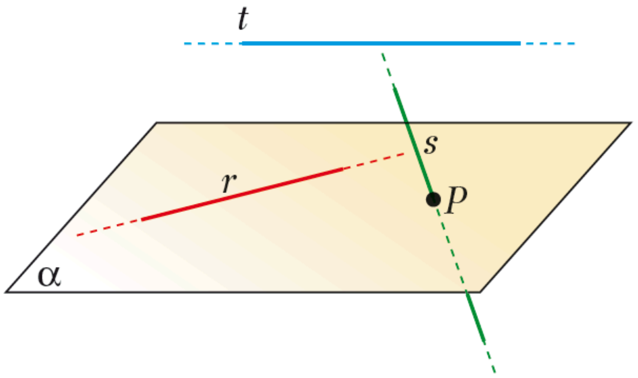
Rette e piani nello spazio

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

Per individuare un **piano** sono necessari: tre punti non allineati, o una retta e un punto non appartenente a essa, o due rette incidenti o due rette parallele.

Una retta e un piano possono assumere nello spazio le seguenti reciproche posizioni:

- ***r* giace su α**: tutti i punti della retta *r* appartengono al piano α;
- ***s* è incidente ad α nel punto *P***: la retta *s* ha un solo punto in comune con il piano α;
- ***t* è parallela ad α**: la retta *t* non ha punti in comune con il piano α.

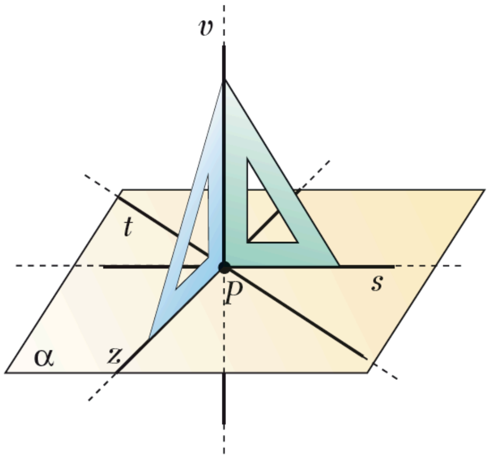


Rette e piani nello spazio

Un caso particolare di retta incidente a un piano è la retta *v* perpendicolare ad α:

$\boldsymbol{v \perp \alpha}$

La retta *v* incidente al piano α nel punto *P* è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per *P* detto **piede** della perpendicolare.



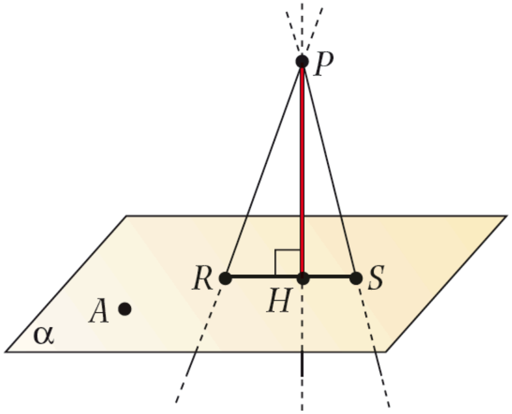
Una retta è perpendicolare a un piano quando lo interseca in un punto ed è perpendicolare a due rette di quel piano passanti per quel punto.

Rette e piani nello spazio

PUNTI E PIANI NELLO SPAZIO

Un punto e un piano possono assumere nello spazio le seguenti posizioni reciproche:

- **il punto *A* giace su α**: il punto *A* appartiene al piano α;
- **il punto *P* è esterno ad α**: il punto *P* non appartiene al piano α.



Dal punto *P* possiamo condurre al piano α una sola perpendicolare che interseca il piano nel punto *H*: il segmento *PH* è detto **distanza** di *P* da α.

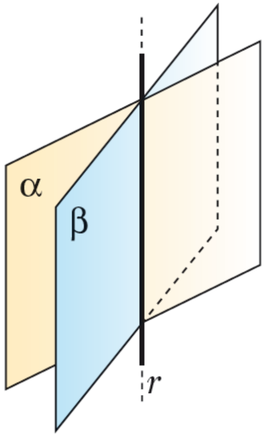
I segmenti *RH* ed *SH* sono detti rispettivamente **proiezione ortogonale** di *PR* e di *PS* sul piano α.

Rette e piani nello spazio

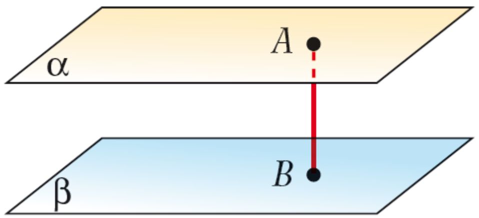
PIANI NELLO SPAZIO

Due piani nello spazio possono assumere le seguenti posizioni reciproche:

- **i piani α e β sono incidenti**: hanno in comune la retta *r* che si dice intersezione dei due piani;



- **i piani α e β sono paralleli**: non hanno alcun punto in comune; la distanza fra due piani paralleli è il segmento di perpendicolare condotto da un punto qualsiasi di un piano all'altro piano.

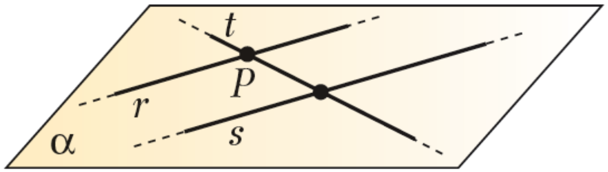


Rette e piani nello spazio

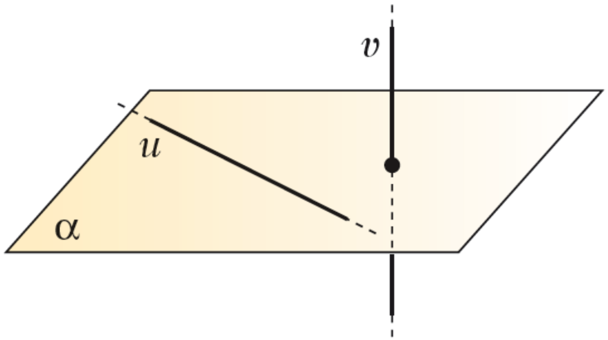
RETTE NELLO SPAZIO

Le rette nello spazio possono essere **complanari** o **sghembe**.

- Le rette *r*, *s*, *t* giacciono sullo stesso piano e si dicono **complanari**. Le rette complanari possono essere distinte in:
  - – **parallele** se non hanno alcun punto in comune, come *r* e *s*;
  - – **incidenti** se si intersecano in un punto *P*, come *r* e *t*.



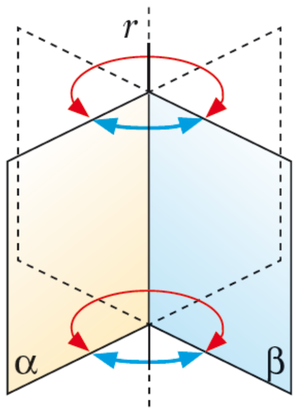
Le rette *u* e *v* non sono complanari perché non esiste un piano che le contenga entrambe; *u* e *v* si dicono **sghembe**.



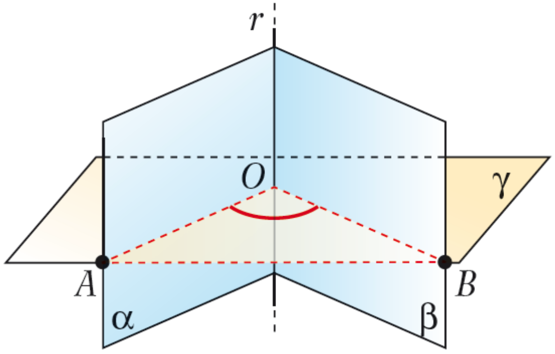
Angoli diedri

I due semipiani α e β, aventi la retta *r* origine in comune, dividono lo spazio in due regioni distinte, illimitate, dette **angolo diedro** o **diedro**:

- **diedro concavo**: contiene i prolungamenti delle facce;
- **diedro convesso**: non contiene i prolungamenti delle facce.



Un piano γ che interseca un diedro perpendicolarmente allo spigolo origina un angolo *AOB* detto **sezione normale del diedro**.



Un diedro è acuto, retto, ottuso a seconda che la sua sezione normale sia un angolo acuto, retto o ottuso.

Due diedri sono:

- **congruenti** se hanno sezioni normali congruenti;
- **consecutivi** se hanno come sezioni normali due angoli consecutivi;
- **adiacenti** se hanno come sezioni normali due angoli adiacenti.

Poliedri e solidi a superficie curva

Un **solido** è una figura che occupa uno spazio a tre dimensioni delimitato da una superficie chiusa che può essere piana o curva.

È possibile dividere i solidi in due sottoinsiemi secondo queste caratteristiche:

- solidi delimitati da poligoni: **poliedri**;
- solidi delimitati da superfici curve: **solidi rotondi** o **a superficie curva**.

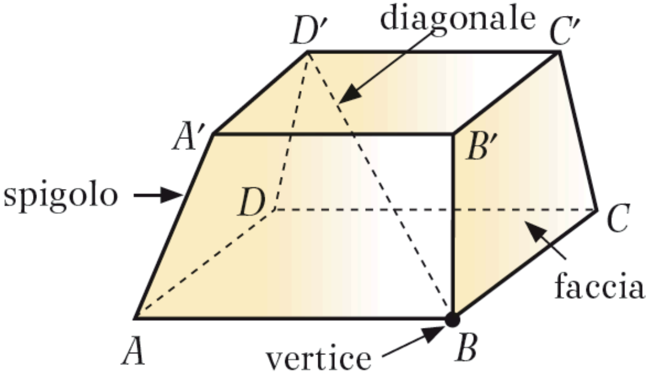
Lattes

Poliedri e solidi a superficie curva

POLIEDRI

I **poliedri** sono figure solide delimitate da poligoni situati su piani diversi e aventi a due a due un lato comune:

- i poligoni si dicono **facce** del poliedro;
- i lati dei poligoni si dicono **spigoli** del poliedro;
- i vertici dei poligoni sono i **vertici** del poliedro;
- ogni segmento che unisce due vertici non appartenenti alla stessa faccia si dice **diagonale** del poliedro.

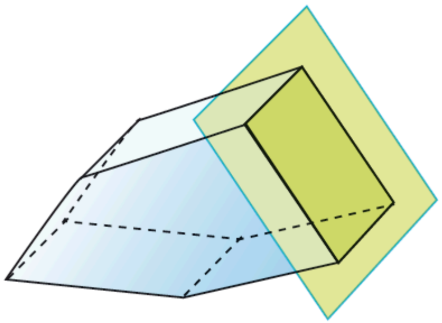


Poliedri e solidi a superficie curva

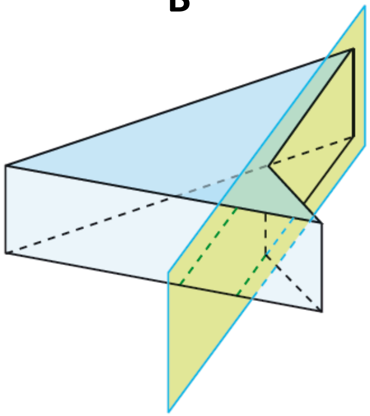
Un poliedro è **convesso** quando i piani contenenti ciascuna faccia non attraversano il solido ma lo lasciano tutto dalla stessa parte (**A**).

Un poliedro è **concavo** quando almeno un piano cui appartiene una delle facce attraversa il solido (**B**).

A

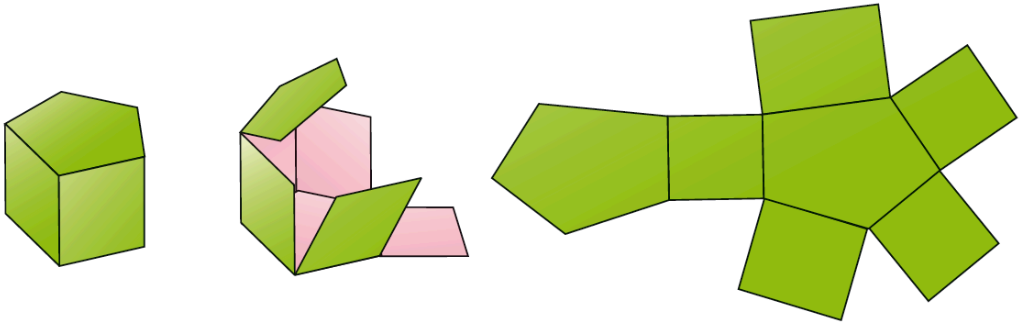


B



La superficie di un qualunque poliedro può essere rappresentata su un piano ed è detta **sviluppo piano del poliedro**.

Indichiamo con $\boldsymbol{A_t}$ l'**area della superficie totale**.

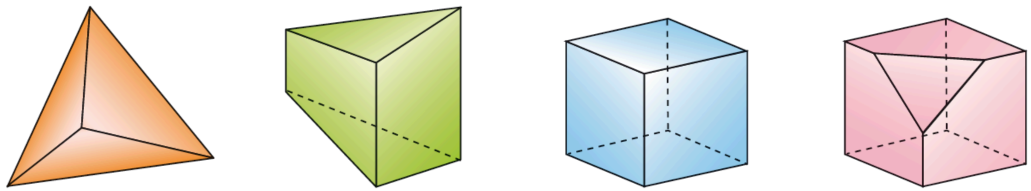


Poliedri e solidi a superficie curva

RELAZIONE DI EULERO

Un poliedro prende il nome dal numero delle sue facce.

I poliedri aventi come facce poligoni regolari si dicono **poliedri regolari**.



La **relazione di Eulero** lega fra loro il numero delle facce (*f*), con il numero dei vertici (*v*) e quello degli spigoli (*s*) di un poliedro convesso secondo la formula $\boldsymbol{f + v = s + 2}$

poliedro	f	v	s	$f + v$	$s + 2$
tetraedro	4	4	6	8	8
pentaedro	5	6	8	10	10
esaedro	6	8	12	14	14
ettaedro	7	10	15	17	17

Lattes

Poliedri e solidi a superficie curva

SOLIDI A SUPERFICIE CURVA

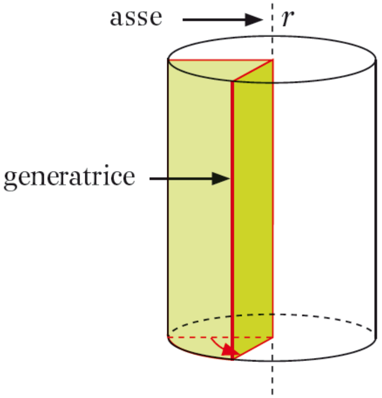
Un **solido di rotazione** è un solido che si ottiene facendo ruotare una figura piana di 360° attorno a un asse:

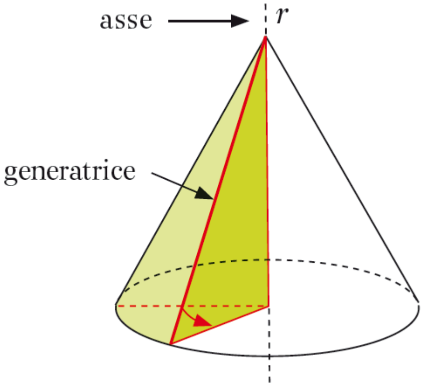
- l'asse *r* attorno a cui si effettua la rotazione è detto **asse di rotazione**;
- la linea che nella rotazione descrive la superficie del solido è detta **generatrice**.

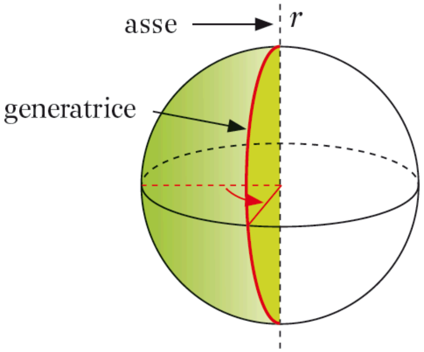
Cilindro retto: si ottiene facendo ruotare un rettangolo attorno a una sua dimensione.

Cono retto: si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo attorno a un suo cateto.

Sfera: si ottiene facendo ruotare un semicerchio attorno al suo diametro.







Equivalenza dei solidi e peso specifico

Lo spazio occupato da un solido prende il nome di **estensione**.

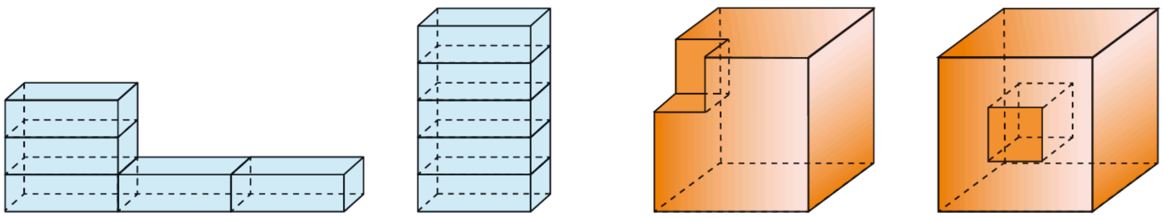
Due figure solide congruenti hanno la stessa estensione.

Solidi diversi hanno generalmente estensioni diverse, ma se hanno uguale estensione si dicono **equivalenti** o **equiestesi**.

Per stabilire se due solidi sono equivalenti possiamo seguire diversi procedimenti, elencati nelle slide successive.

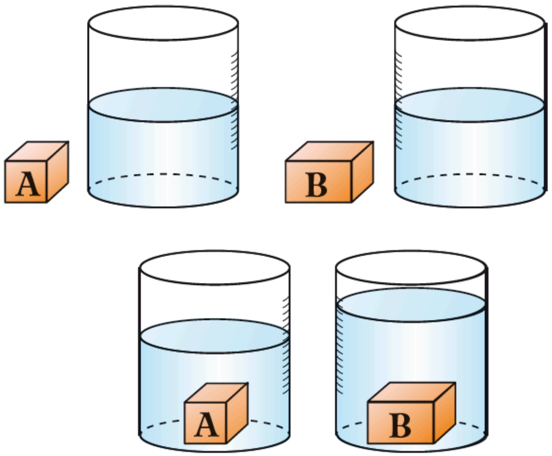
Equivalenza dei solidi e peso specifico

- Si scompongono, se è possibile, i solidi dati in somma o differenza di parti congruenti:



I solidi sono equivalenti, in quanto equicomposti.

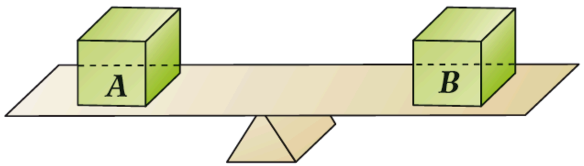
- Se i solidi non sono cavi e sono di materiali diversi, si immergono in due cilindri graduati contenenti la stessa quantità d'acqua. Un solido, immerso in un liquido, sposta una quantità di liquido pari alla sua estensione: se la quantità d'acqua spostata è la stessa nei due cilindri i solidi saranno equivalenti, altrimenti avrà estensione maggiore quello che sposta una maggiore quantità d'acqua.

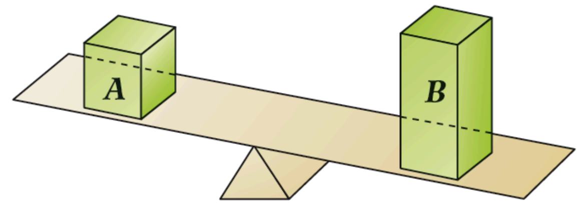


L'estensione del solido **B** è maggiore di quella del solido **A**.

Equivalenza dei solidi e peso specifico

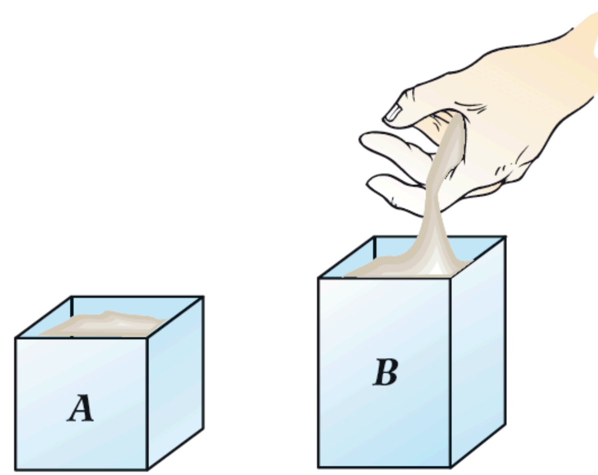
- Se i solidi non sono cavi e sono dello stesso materiale si possono pesare. Se il peso è uguale, i solidi sono equivalenti, altrimenti avrà estensione maggiore quello con peso maggiore.





I due solidi della figura di sinistra sono equivalenti; nella figura di destra il solido **B** ha estensione maggiore.

- Se i solidi sono cavi basterà riempirli con la stessa sostanza, per esempio sabbia, farina, sale... Se i due solidi contengono la stessa quantità di materiale sono equivalenti, altrimenti ha estensione maggiore quello che contiene la quantità maggiore di materiale.

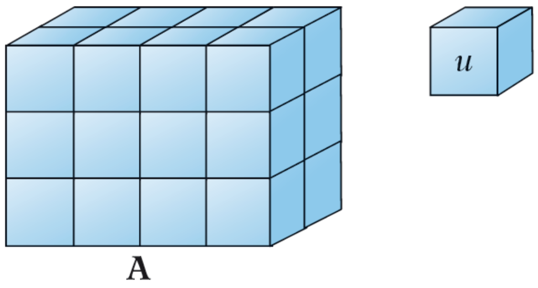


I due solidi **A** e **B** contengono quantità diverse della stessa sostanza, non sono quindi equivalenti.

Equivalenza dei solidi e peso specifico

VOLUME DI UN SOLIDO

Per **misurare l'estensione di un solido** occorre confrontarla con quella di un altro solido scelto come unità di misura e calcolare quante volte l'unità di misura è contenuta nel solido.



Il volume di un solido, che si indica con la lettera *V*, è il numero che indica quante volte l'unità di misura scelta è contenuta nel solido considerato.

- L'unità di misura del volume è il **metro cubo** (m^3) con i suoi multipli e sottomultipli.
- Nei gas e nei liquidi le misure di volume vengono a volte espresse con unità di misura di capacità: il **litro** (ℓ) con i suoi multipli e sottomultipli.

RICORDA: 1 ℓ è equivalente a 1 dm^3, 1 ml è equivalente a 1 cm^3 e 10 hl sono equivalenti a 1 m^3.

Equivalenza dei solidi e peso specifico

PESO SPECIFICO E DENSITÀ

Materiali diversi, a parità di volume, hanno pesi diversi.

- Il **peso specifico** P_s della sostanza che costituisce un corpo è il rapporto fra il peso P e il volume V del corpo stesso:

  $$P_s = \frac{P}{V}$$

- La **densità** d di un corpo è il rapporto fra la sua massa m e il suo volume V:

  $$d = \frac{m}{V}$$

Peso e **massa** non sono sinonimi:

- il **peso** è una forza che dipende dalla forza di gravità;
- la **massa** è la quantità di materia che occupa un dato volume.